

# Introduzindo o Formalismo Variacional no Ensino de Mecânica Básica na Graduação em Engenharia

Germano Amaral Monerat<sup>1</sup>, Thaisa Marques Gomes de Oliveira<sup>2</sup>,  
Diego Coutinho Fernandes Silva<sup>3</sup>, Eduardo Vasquez Corrêa Silva<sup>4</sup>

*Departamento de Matemática e Computação,  
Faculdade de Tecnologia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro.  
Estrada Resende-Riachuelo, s/n.º., Morada da Colina, CEP 27523-000, Resende, RJ*

## Resumo

*É possível introduzir o formalismo variacional de Lagrange para a mecânica clássica como conteúdo do módulo básico de um curso de graduação em Engenharia, tendo como pré-requisitos as ferramentas de cálculo diferencial e integral de funções de muitas variáveis e análise vetorial, tradicionalmente presentes nas grades curriculares. Este formalismo mostra-se mais sistemático como ferramenta de obtenção das equações de movimento de um sistema de partículas, em contraste com formalismo newtoniano tradicionalmente utilizado nos cursos de graduação, que demanda um trabalho algébrico muito maior. Dois exemplos são examinados: o pêndulo simples e o pêndulo duplo.*

Palavras-chaves: Mecânica clássica, formalismo lagrangiano, pêndulo simples, pêndulo duplo.

<sup>1</sup> Doutor em Física, Prof. Adjunto, e-mail [monerat@uerj.br](mailto:monerat@uerj.br).

<sup>2</sup> Aluna de graduação em Engenharia de Produção, e-mail [thaisamgo@yahoo.com.br](mailto:thaisamgo@yahoo.com.br).

<sup>3</sup> Aluno de graduação em Engenharia de Produção, e-mail [diegoc\\_fernandes@yahoo.com.br](mailto:diegoc_fernandes@yahoo.com.br).

<sup>4</sup> Doutor em Física, Prof. Adjunto, e-mail [evasquez@uerj.br](mailto:evasquez@uerj.br).

## 1. Introdução

Em 1687 Isaac Newton publicou seus estudos sobre as leis do movimento dos corpos, lançando os alicerces do que hoje é conhecido como mecânica clássica ou newtoniana [1]. Postulando três leis básicas, Newton procurou descrever toda a dinâmica do movimento dos corpos a partir delas. A Primeira Lei, conhecida como Lei da Inércia, conceitua o referencial inercial e a noção qualitativa de movimento inercial de um corpo. A Segunda Lei fornece uma definição quantitativa de força resultante sobre um corpo. Em notação moderna,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

em que  $\vec{p} = m\vec{v}$  é o momentum linear ou *quantidade de movimento* do corpo,  $m$  é a sua massa,  $\vec{v}$  a sua velocidade e  $\vec{F}$  a força resultante sobre o corpo. A Terceira Lei, conhecida como a Lei da Ação e Reação, se refere a *dois* corpos em interação, relacionando as forças estabelecidas entre eles. De acordo com estas leis, uma vez conhecidas as forças que atuam sobre um dado corpo, sua posição e sua velocidade em um dado instante de tempo, é possível (em princípio) determinar o seu comportamento mecânico (ou seja, a posição e velocidade) em qualquer instante de tempo.

O primeiro contato dos estudantes dos cursos de graduação de Engenharia com a mecânica newtoniana geralmente ocorre no primeiro ano dos cursos de graduação. Diversas dificuldades são encontradas; em particular, a decorrente do uso intensivo de diagramas geométricos de forças e decomposição algébrica de suas componentes segundo um sistema de eixos coordenados escolhido, diagramas vitais para a obtenção das equações de movimento de um dado sistema. Além disso, a presença de forças de vínculos em diversos sistemas físicos [2,3] torna a formulação newtoniana extremamente trabalhosa, devido à utilização de graus de liberdade supérfluos. Essa dificuldade intrínseca ao formalismo newtoniano faz com que o estudo de alguns sistemas interessantes seja omitido. Talvez uma forma viável de contornar estas dificuldades seja a introdução do formalismo variacional de Lagrange [4, 5,6] para o estudo da mecânica clássica, no contexto de um curso de graduação.

Na seção 2 apresentamos em linhas gerais o formalismo lagrangiano. Na seção 3 dois exemplos são empregados: o pêndulo simples e o pêndulo duplo. Construímos as equações de movimento para estes sistemas tanto pelo formalismo newtoniano quanto pelo formalismo lagrangiano. A seção 4 contém as nossas conclusões.

## 2. O Ensino do Formalismo Variacional de Lagrange para a Mecânica

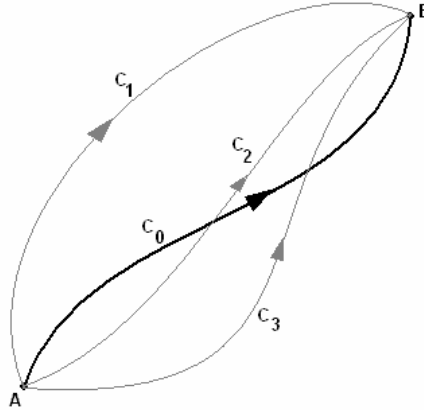
### 2.1. O Princípio de Mínima Ação

Em 1788 Joseph-Louis Lagrange desenvolveu uma formulação da mecânica que ele denominou Mecânica Analítica [4], de caráter muito mais geral do que a formulação newtoniana, no que tange às definições de momento linear e força, e baseada em ferramental matemático bem mais poderoso. No formalismo lagrangiano, postula-se a existência de uma função escalar  $L(q, \dot{q}, t)$ , denominada função de Lagrange ou lagrangiana do sistema, escrita em termos das coordenadas e das velocidades do sistema de partículas. As equações de movimento de um sistema mecânico são obtidas a partir desta lagrangiana, do modo descrito a seguir. Seja  $q_A$  a configuração inicial do sistema em um instante de tempo  $t_A$ , e  $q_B$  a configuração deste um instante de tempo posterior  $t_B$ . Considere uma trajetória hipotética descrita por qualquer função contínua e derivável  $q(t)$  tal que  $q(t_A)=q_A$  e  $q(t_B)=q_B$ , ou seja, uma trajetória suave conectando as duas configurações citadas anteriormente. Define-se a ação  $S$  do sistema como sendo a grandeza

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt.$$

Fixados  $(q_A, t_A)$  e  $(q_B, t_B)$ , o valor desta integral depende, fundamentalmente, da trajetória  $q(t)$  escolhida; diz-se que o número  $S$  é um *funcional* da trajetória  $q(t)$ . Segundo Lagrange, a trajetória *real*  $\bar{q}(t)$  percorrida pelo sistema é aquela para a qual o valor de  $S$  é mínimo. Este é o chamado *princípio da mínima ação*, que reflete o princípio proposto por Maupertuis, segundo o qual “a Natureza, na produção de seus efeitos,

sempre age da maneira mais simples". O princípio de mínima ação, por ser um *princípio*, um *postulado*, não é demonstrado; o mesmo ocorre para as Leis de Newton, que são tomadas como postulados.



**Figura 1:** Ilustração do princípio de mínima ação. A cada curva suave (i.e., contínua e derivável)  $C_i$  conectando as configurações A e B corresponde um valor para o funcional de ação  $S$ . A curva que minimiza  $S$  (aqui representada por  $C_0$ ) corresponde à trajetória real do sistema.

## 2.2. A Equação de Euler-Lagrange

Postulando a existência de uma trajetória  $\bar{q}(t)$  (cuja dependência exata em  $t$  ainda é desconhecida) que minimize o funcional de ação  $S$ , utilizaremos uma família de trajetórias  $q(\alpha, t)$ , dependentes de um parâmetro  $\alpha$ , tal que: (a) para todo valor de  $\alpha$ , todas as trajetórias se iniciam em  $q_A$  no instante  $t_A$  e finalizam-se em  $q_B$  no instante  $t_B$ , i.e.,  $q(\alpha, t_A) = q_A$  e  $q(\alpha, t_B) = q_B$ ; (b) para  $\alpha=0$ , a trajetória coincide com a trajetória  $\bar{q}(t)$ , ou seja,  $q(0, t) = \bar{q}(t)$ . Deste modo, variações de  $S$  com a trajetória podem ser traduzidas como variações de  $S$  devido a variações do parâmetro  $\alpha$ . O princípio variacional pode ser expresso da forma

$$\delta S \equiv \left. \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} d\alpha = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial S}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

o que resultará, em última análise, numa equação diferencial ordinária para a função incógnita  $\bar{q}(t)$ . De fato, a expressão acima resulta em

$$\int_{t_A}^{t_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt = 0,$$

que pode ser obtida utilizando-se conceitos aprendidos em um curso de Cálculo Diferencial e Integral. Usando a regra da derivada do produto, o segundo termo do integrando pode ser escrito como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q,$$

levando-se em conta que

$$\frac{d}{dt} \delta q = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{dq}{dt} \right) d\alpha = \delta \dot{q}.$$

Deste modo, obtemos

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_B} - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_A} + \int_{t_A}^{t_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt = 0.$$

Como todas as trajetórias consideradas coincidem nos instantes inicial e final, i.e.,  $\delta q(t_B) = \delta q(t_A) = 0$ , então

$$\int_{t_A}^{t_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt = 0.$$

Esta expressão deve ser verdadeira para quaisquer variações  $\delta q$ ; logo,

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0.$$

Esta é a equação de Euler-Lagrange. Não se trata de uma equação diferencial para  $L$ ; dada a lagrangiana  $L$ , o que se obtém é uma equação diferencial para  $q(t)$ . Dessa forma, a partir da lagrangiana de um dado sistema, suas equações de movimento podem ser facilmente obtidas. Mas como escrever a função de Lagrange de um sistema?

### 2.3. Forma da lagrangiana de um sistema mecânico

Considera-se inicialmente o caso de uma partícula livre em movimento no espaço absoluto vazio, descrito em relação a um referencial inercial qualquer, em relação ao qual são feitas todas as medidas de distâncias e intervalos de tempo. Para realizar estas medidas, é necessário escolhermos um sistema de coordenadas espaciais (uma origem e um sistema de eixos coordenados) e também um instante “zero” de tempo (a origem da contagem dos tempos). Os fenômenos previstos pelas leis físicas não podem depender nem da escolha da origem dos eixos coordenados (propriedade denominada *homogeneidade* do espaço), nem da orientação escolhida para os eixos (*isotropia* do espaço), nem da escolha do instante zero (*homogeneidade* do tempo). Do que poderia depender a lagrangiana da partícula livre, tendo em vista estas propriedades? Devido à homogeneidade do espaço e do tempo, a lagrangiana da partícula livre não poderia depender da posição da partícula, nem do instante de tempo considerado; devido à isotropia do espaço, não deveria também depender da direção de seu movimento, ou seja, do *vetor* velocidade. Mas nada impede que dependa do *módulo* da velocidade. Uma primeira idéia então seria uma lagrangiana linear na velocidade, da forma  $L = c \dot{q}$ , em que  $c$  é uma constante não-nula arbitrária. No entanto, esta lagrangiana não nos leva muito longe, visto que da equação de Euler-Lagrange resulta a identidade  $0=0$ . Uma segunda forma mais simples seria

$$L_0 = c \dot{q}^2$$

que fornece a equação de movimento

$$2c \dot{q} = 0 \rightarrow \dot{q} = 0$$

que é o resultado esperado: uma partícula livre possui aceleração nula.

Qual seria o significado da constante  $c$ ? Vamos considerar agora uma partícula sobre a influência de uma força resultante não nula  $f(t)$ , dada em função do tempo. A presença desta força quebra as propriedades de isotropia e homogeneidade mencionadas no caso anterior, portanto a lagrangiana não terá a mesma forma. Sabemos, no entanto, que devemos recair neste caso, no limite  $f(t) \rightarrow 0$ ; e que a equação de movimento deve ter a forma

$$m \ddot{q} = f(t).$$

Podemos constatar que isto é facilmente obtido com a lagrangiana

$$L_1 = c \dot{q}^2 + q f(t);$$

de fato, ao aplicarmos a equação de Euler-Lagrange, obtemos

$$f(t) - 2c \dot{q} = 0$$

que nos permite identificar  $c=m/2$ . Ou seja, para uma partícula sobre uma força resultante  $f(t)$ , a lagrangiana é da forma

$$L_1 = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + q f(t).$$

Para a partícula livre,

$$L_0 = \frac{m}{2} \dot{q}^2,$$

ou seja, a lagrangiana se resume à *energia cinética* da partícula.

No caso de uma força conservativa, ou seja, que possa ser obtida a partir de um potencial  $V(q)$  tal que

$$f(q) = -\frac{\partial V(q)}{\partial q}$$

a equação de movimento

$$m \ddot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q}$$

pode ser obtida a partir da lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q).$$

Sistemas mecânicos conservativos podem ser descritos por lagrangianas da forma

$$L = T(\dot{\phi}, q) - V(q)$$

em que  $T(\dot{\phi}, q)$  é a energia cinética, e  $V(q)$  a energia potencial do sistema. Para a descrição destes sistemas, devemos saber escrever corretamente estas energias, e uma vez construída a lagrangiana, obtemos as equações de movimento do sistema diretamente das equações de Euler-Lagrange.

### 3. Estudo de Casos

#### 3.1. O Pêndulo Simples

Seja um pêndulo simples restrito a um plano, submetido à aceleração da gravidade local  $\frac{1}{g}$ , conforme representado na Fig. 2.

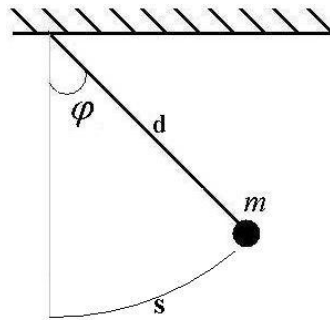


Figura 2: Pêndulo simples no plano.

#### *Equação de movimento do pêndulo simples via formalismo newtoniano*

O primeiro passo é identificar as forças que atuam sobre a partícula de massa  $m$ ; neste caso, a força-peso  $\vec{P} = m\vec{g}$  e a tração no fio  $\vec{T}$ . Em seguida, escolher um sistema de eixos coordenados segundo os quais expressamos em componentes a 2ª. Lei de Newton,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a},$$

obtendo equações em termos das coordenadas escolhidas para representar o sistema, e suas derivadas (no caso em questão, na variável  $\phi$  e suas derivadas temporais). Aqui, somente a componente transversal da aceleração da partícula é relevante; ela é proporcional a componente transversal da força resultante,

$$F_t = ma_t \rightarrow -mg \sin \phi = md\ddot{\phi}$$

De onde se obtém diretamente a equação de movimento,

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{d} \sin \phi = 0.$$

Este é um procedimento relativamente simples, dada a simplicidade do sistema.

#### *Equação de movimento do pêndulo simples via formalismo lagrangiano*

O vetor posição da partícula é da forma

$$\vec{r} = (d \sin \phi) \hat{i} + (d \cos \phi) \hat{j}.$$

A energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v};$$

com um pouco de álgebra vetorial, obtemos

$$T = \frac{1}{2} m d^2 \dot{\phi}^2.$$

A energia potencial do sistema é

$$V = -m g d \cos \varphi,$$

tomando-se como referência o plano perpendicular a  $\hat{g}$  contendo o ponto fixo do pêndulo. A lagrangiana para este sistema é, portanto,

$$L = T - V = \frac{1}{2} m d^2 \dot{\varphi}^2 + m g d \cos \varphi.$$

Ao utilizarmos a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0,$$

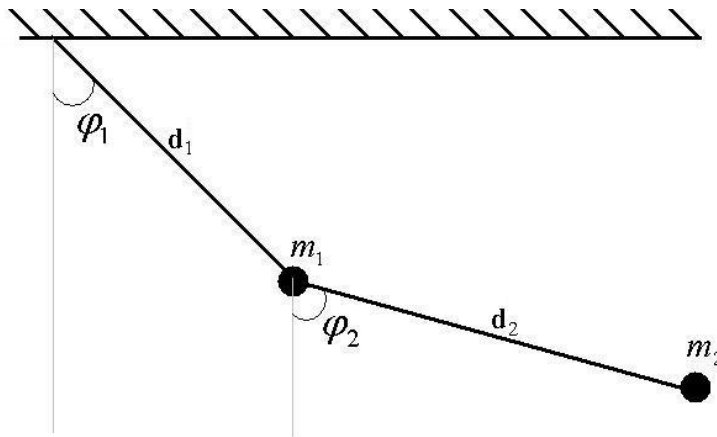
obtemos a equação de movimento do sistema,

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{d} \sin \varphi = 0.$$

### 3.2. O Pêndulo Duplo

#### *Equações de movimento do pêndulo duplo via formalismo newtoniano*

A configuração do pêndulo duplo pode ser descrita em termos dos ângulos  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , como indicado na Fig. 3.



**Figura 3:** Pêndulo duplo no plano.

Os ângulos  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e as coordenadas cartesianas  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  das partículas estão relacionados pela transformação

$$x_1 = d_1 \cos \varphi_1$$

$$y_1 = d_1 \sin \varphi_1$$

$$x_2 = d_1 \cos \varphi_1 + d_2 \cos \varphi_2$$

$$y_2 = d_1 \sin \varphi_1 + d_2 \sin \varphi_2$$

em que escolhemos a origem dos eixos sobre o ponto fixo do pêndulo, orientando o eixo x na vertical e para baixo, e o eixo y na horizontal e para a direita. Ao aplicarmos a 2ª. Lei de Newton às partículas de massa  $m_1$  e  $m_2$ , obtemos as seguintes equações, em termos das componentes cartesianas das acelerações sobre cada partícula:

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - T_1 \cos \varphi_1 + T_2 \cos \varphi_2$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -T_1 \sin \varphi_1 + T_2 \sin \varphi_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 g - T_2 \cos \varphi_2$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -T_2 \sin \varphi_2$$

Escrevendo estas componentes em termos das coordenadas angulares  $(\varphi_1, \varphi_2)$  e suas derivadas, obtemos o sistema

$$\begin{aligned}
-m_1 d_1 (\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1) &= m_1 g - T_1 \cos \varphi_1 + T_2 \cos \varphi_2 \\
-m_1 d_1 (\dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 - \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1) &= -T_1 \sin \varphi_1 + T_2 \sin \varphi_2 \\
-m_2 [d_1 (\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1) + d_2 (\ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2)] &= m_2 g - T_2 \cos \varphi_2 \\
-m_2 [d_1 (\dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 - \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1) + d_2 (\dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 - \ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2)] &= -T_2 \sin \varphi_2
\end{aligned}$$

que, após trabalhosas manipulações algébricas, pode ser reescrito de forma a explicitar as derivadas segundas das coordenadas angulares,

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{m_1 G_1 + m_2 G_2}{l_1 G_5} \quad e \quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{m_1 G_3 + m_2 G_4}{l_2 G_5},$$

em que

$$\begin{aligned}
G_1 &= -2g \sin \varphi_1 \\
G_2 &= d_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) + 2d_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + g \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) - g \sin \varphi_1 \\
G_3 &= -2d_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) + g \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) - g \sin \theta_2 \\
G_4 &= -2d_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + g \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) - g \sin \theta_2 + d_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) \\
G_5 &= 2m_1 + m_2(1 - \cos 2(\varphi_1 - \varphi_2))
\end{aligned}$$

### *Equações de movimento do pêndulo duplo via formalismo lagrangiano*

Podemos subdividir o pêndulo duplo em dois: o primeiro deles com comprimento  $d_1$ , da extremidade fixa à massa  $m_1$ , e o segundo com comprimento  $d_2$ , com uma extremidade em  $m_1$  e a outra em  $m_2$ , como ilustrado na Fig. 3. O vetor posição da primeira partícula é da forma

$$\vec{r}_1 = d_1 \sin \varphi_1 \hat{i} + d_1 \cos \varphi_1 \hat{j};$$

sua energia cinética é dada por

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = \frac{1}{2} m_1 d_1^2 \dot{\varphi}_1^2$$

e a sua energia potencial é da forma

$$V_1 = -m_1 g d_1 \cos \varphi_1.$$

O vetor posição da segunda partícula é

$$\vec{r}_2 = (d_1 \sin \varphi_1 + d_2 \sin \varphi_2) \hat{i} + (d_1 \cos \varphi_1 + d_2 \cos \varphi_2) \hat{j},$$

sua energia cinética pode ser escrita como

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = \frac{m_2}{2} [\dot{\varphi}_1^2 d_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 d_2^2 + 2\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 d_1 d_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

e sua energia potencial como

$$V_2 = -m_2 g (d_1 \cos \varphi_1 + d_2 \cos \varphi_2).$$

A lagrangiana total do sistema é a soma das lagrangianas referentes ao primeiro e ao segundo pêndulo,

$$\begin{aligned}
L = T_1 + T_2 - V_1 - V_2 &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\varphi}_1^2 d_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\varphi}_2^2 d_2^2 + m_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 d_1 d_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\
&+ (m_1 + m_2) g d_1 \cos \varphi_1 + m_2 g d_2 \cos \varphi_2
\end{aligned}$$

e as equações de movimento

$$Q_1 \ddot{\varphi}_1 + Q_2 \dot{\varphi}_2 = Q_3$$

$$Q_4 \ddot{\varphi}_1 + Q_5 \dot{\varphi}_2 = Q_6$$

podem ser diretamente obtidas da forma geral das equações de Euler-Lagrange. Os  $Q$ 's são funções das coordenadas e suas derivadas primeiras. Após manipulação algébrica relativamente simples, as equações podem ser reescritas explicitando-se  $\ddot{\varphi}_1$  e  $\ddot{\varphi}_2$  em relação às coordenadas e suas derivadas primeiras, resultando em equações idênticas àquelas obtidas via formalismo newtoniano.

#### 4. Conclusão

Nas últimas décadas o formalismo variacional tem sido aplicado cada vez mais frequentemente nas diversas áreas da Engenharia [7-10]. Com o presente trabalho, sugerimos a introdução do formalismo lagrangiano no módulo básico de um curso de Engenharia, supondo como pré-requisitos noções básicas de mecânica newtoniana e ferramentas de cálculo diferencial e integral, bem como de análise vetorial. Uma vantagem do formalismo lagrangiano sobre o newtoniano é que ele possibilita a obtenção das equações de movimento de um sistema de modo mais sistemático e sob trabalho algébrico bem menor.

#### 5. Bibliografia

- [1] I. Newton, *Mathematical principles of Natural Philosophy*. Berkeley: University of California Press, 1934.
- [2] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.
- [3] K. R. Symon, *Mecânica*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1982.
- [4] J. L. Lagrange. *Mécanique Analytique*. 1788.
- [5] J. Barcellos Neto, *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.
- [6] L. Landau e E. Lifchitz. *Mecânica*. São Paulo: Hemus, s.d.
- [7] Bullo, F. Leonard, N.E. Lewis, A.D. *Controllability and motion algorithms for underactuated Lagrangian systems on Lie groups*. IEEE Transactions on Automatic Control, 45(8), 2000, pp. 1437-1454.
- [8] Astolfi, A. Menini, L. *Noninteracting control with stability for Hamiltonian systems*. IEEE Transactions on Automatic Control 45(8) , 2000. pp. 1470-1482.
- [9] P. C. Andia; F. Costanzo; G. L. Gray. *A Lagrangian-Based continuum homogenization approach applicable to molecular dynamics simulations*. International Journal of Solids and Structures, 42, 2005 , pp. 6409-6432.
- [10] A. van der Schaft. *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer-Verlag, 2000.